MatMaraton

Równania i nierówności

1. Szybkie przypomnienie

Definicja

Równaniem liniowym *nazywamy dwa wyrażenia algebraiczne połączone znakiem równości. Każde równanie ma swoją* ***lewą*** *i* ***prawą stronę****, które co do zasady są sobie równe wartością:*

$$5x + 7 = 3x - 2 - x$$

Lewa strona równania

Prawa strona równania

Mówiąc o **równaniu liniowym z jedną niewiadomą** należy pamiętać, że można je doprowadzić do następującej postaci:

$$ax + b = 0$$

Co po przekształceniu daje:

$$x = -\frac{b}{a}$$

W celu rozwiązania równania liniowego należy dokonać takich jego przekształceń, aby otrzymać równość w postaci niewiadomej po jednej stronie znaku równości oraz wartości po drugiej stronie. W procesie dojścia do wyniku końcowego można korzystać z:

- dodawania lub odejmowania od obu stron równania takiej samej wartości,
- dzielenia lub mnożenia obu stron równania przez taką samą liczbę.

Na przykładzie:

$$\begin{aligned}
5x + 7 &= 3x - 2 - x \\
5x + 7 &= 2x - 2 \\
5x + 7 - 2x &= 2x - 2 - 2x \\
3x + 7 &= -2 \\
3x + 7 - 7 &= -2 - 7 \\
3x &= -9 \quad / \div 3 \\
x &= -3
\end{aligned}$$

Od obu stron odejmujemy tę samą wartość

Obie strony dzielimy przez tę samą wartość

Definicja

Równanie liniowe nazywamy:

- **oznaczonym** - jeżeli ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- **tożsamościowym** (nieoznaczonym) - jeżeli ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- **sprzecznym** - jeżeli nie ma rozwiązań.

Definicja

Nierównością liniową nazywamy takie wyrażenia algebraiczne pomiędzy, którymi występuje, któryś ze znaków: $<, >, \leqslant, \geqslant$.

Rozwiązaniem nierówności jest przedział liczb ją spełniających.

Na przykładzie:

$$
\begin{aligned}
5x + 7 &\geqslant 3x - 2 - x \\
5x + 7 &\geqslant 2x - 2 \\
5x - 2x &\geqslant -2 - 7 \\
3x &\geqslant -9 \ / \div 3 \\
x &\geqslant -3
\end{aligned}
$$

$$x \in \langle -3, \infty)$$

Definicja

Równaniem i nierównością kwadratową nazywamy takie równania i nierówności, gdzie po jednej stronie równania lub nierówności występuje **trójmian kwadratowy**.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Rozwiązania takiego równania lub nierówności wyznaczamy poprzez podstawienie do wzorów odpowiednio na deltę, a następnie na pierwiastki równania:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

gdy:

$\Delta > 0$ -dwa rozwiązania

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta = 0$ -jedno rozwiązanie

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

$\Delta < 0$ -brak rozwiązań

Pierwiastki równania odpowiadają rozwiązaniom równania, bądź też punktom granicznym nierówności.

Definicja

Wartością bezwzględną liczby rzeczywistej liczby *x* nazywamy odległość na osi liczbowej punktu *x* od punktu 0.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych nierówności z wartością bezwzględną możemy zamienić na odpowiadające im nierówności bez niej:

$|x - a| \leqslant r$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $a - r \leqslant x \leqslant a + r$

$|x - a| \geqslant r$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x \leqslant a - r$ *lub* $x \geqslant a + r$

2. Wzory z tablic

- **Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:**

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

- Dla dowolnej liczby *x* mamy:

$$|x| \geq 0 \qquad |x| = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0 \qquad |-x| = |x|$$

- Dla dowolnych liczby *x, y* mamy:

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad |x-y| \leq |x| + |y| \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

- Ponadto, jeżeli $y \neq 0$, to:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz $r \geqslant 0$ mamy:

$$|x-a| \leq r \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a-r \leq x \leq a+r$$
$$|x-a| \geq r \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \leq a-r \text{ lub } x \geq a+r$$

- **Wyróżnikiem** Δ trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0,\ b, c \in R$, zmiennej rzeczywistej *x* nazywamy liczbę

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- **Liczba rozwiązań równania kwadratowego** (liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej, liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$) zależy od wyróżnika Δ
  1. jeżeli $\Delta > 0$ to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  2. jeżeli $\Delta = 0$ to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

  3. jeżeli $\Delta < 0$ to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych).

3. Wszystkie wzory po kolei

1. Objaśniając pierwsze dwie zależności, czyli:

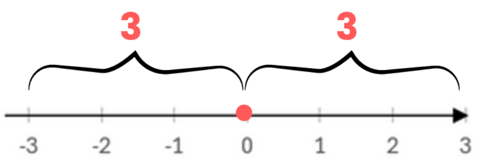
$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

oraz:

$$|x| \geq 0 \qquad |x| = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0 \qquad |-x| = |x|$$

należy pamiętać o definicji wartości bezwzględnej, która mówi, że nazywamy nią odległość punktu od punktu 0 na osi liczbowej. Oznacza to, że odległość punktu dodatniego i odpowiadającego mu ujemnego jest taka sama do punktu 0, zatem ich wartości bezwzględne są sobie równe.
Odległość punktu x=0 od punktu 0, jest po prostu zerowa, czyli równa 0.

Przykład



$$|x| = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -3 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

$$|-3| = |3|$$

2. Biorąc pod uwagę zależności na sumę, różnicę, iloczyn i iloraz wartości bezwzględnej można zauważyć. że przykładowo:

Przykład

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$
$$|-3+5| \leqslant |-3| + |5|$$
$$|2| \leqslant 3+5$$
$$2 \leqslant 8$$

$$|x-y| \leqslant |x| + |y|$$
$$|10-5| \leqslant |10| + |5|$$
$$|5| \leqslant 10+5$$
$$5 \leqslant 15$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$
$$|-2 \cdot 5| = |-2| \cdot |5|$$
$$|-10| = 2 \cdot 5$$
$$10 = 10$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$
$$\left|\frac{10}{5}\right| = \frac{|10|}{|5|}$$
$$|2| = \frac{10}{5}$$
$$2 = 2$$

3. Korzystając z definicji można rozpisać kolejne dwa wzory:

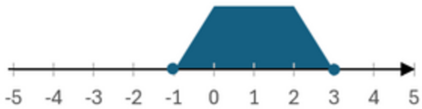
$$|x-a| \leq r \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a - r \leq x \leq a + r$$
$$|x-a| \geq r \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad x \leq a - r \quad \text{lub} \quad x \geq a + r$$

Przykład

$$|x-1| \leqslant 2$$

$$\begin{array}{rcl} x-1 \leqslant 2 & \wedge & x-1 \geqslant -2 \\ x \leqslant 2-(-1) & & x \geqslant -2-(-1) \\ x \leqslant 2+1 & & x \geqslant -2+1 \\ x \leqslant 3 & & x \geqslant -1 \end{array}$$

Powyższe przekształcenia odpowiadają pierwszemu z równań.
Po zaznaczeniu na osi obu przedziałów otrzymamy zakres odpowiadający rozwiązaniu:



Rozwiązaniem zatem jest przedział:

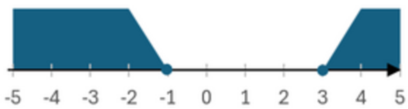
$$x \in \langle -1, 3 \rangle$$

Przykład

$$|x-1| \geqslant 2$$

$$\begin{array}{rcl} x-1 \geqslant 2 & \vee & x-1 \leqslant -2 \\ x \geqslant 2-(-1) & & x \leqslant -2-(-1) \\ x \leqslant 2+1 & & x \leqslant -2+1 \\ x \geqslant 3 & & x \leqslant -1 \end{array}$$

Powyższe przekształcenia odpowiadają drugiemu z równań.
Po zaznaczeniu na osi obu przedziałów otrzymamy zakres odpowiadający rozwiązaniu:



Rozwiązaniem zatem jest przedział:

$$x \in (-\infty, -1 > \cup < 3, \infty)$$

4. Rozwiązując równanie kwadratowe wystarczy po prostu odpowiednie wartości podstawić do wzoru w zadanej kolejności

Przykład

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$a = 1$
$b = -6$
$c = 5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$$

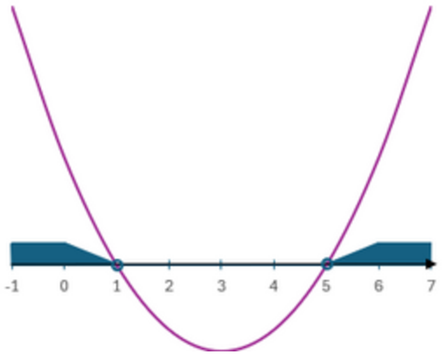
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x \in \{1, 5\}$$

Gdyby w powyższym przykładzie występowały nierówności, to postępujemy w początkowej fazie tak samo, ale wykreślamy zbiór rozwiązań nierówności:

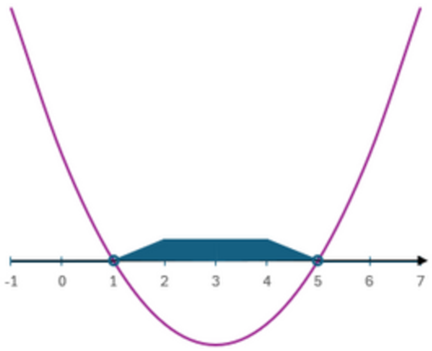
$$x^2 - 6x + 5 > 0$$



$$x \in (-\infty, 1) \cup (5, \infty))$$

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 5$$

$$x^2 - 6x + 5 < 0$$



$$x \in (-1, 3)$$

5. W przypadku, gdy wartość wyróżnika kwadratowego wynosi 0 otrzymujemy jedno rozwiązanie równania

Przykład

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$a = 1$
$b = -2$
$c = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x \in \{1\}$$

4. Pewniaki maturalne

Wśród pewniaków maturalnych dotyczących równań i nierówności należy wymienić:

- nierówności z wartością bezwzględną,
- równania iloczynowe, czyli równania typu:

$$(x^2 - 4)(x + 2) = 0$$

- równania wymierne, czyli:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{x + 1}$$

Zadanie 1

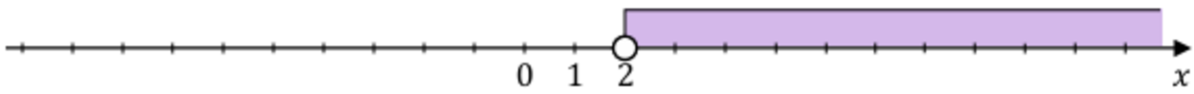
Informator o egzaminie maturalnym z matematyki jako przedmiotu obowiązkowego (poziom podstawowy) od roku szkolnego 2024/2025

Dana jest nierówność

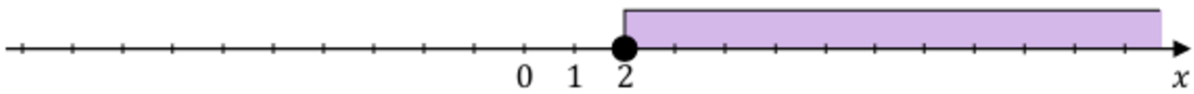
$$\frac{2x-1}{2}-\frac{x+2}{3}\geq\frac{1}{6}$$

Na którym rysunku poprawnie zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających powyższą nierówność? Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

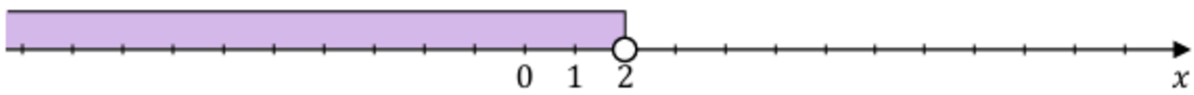
A.



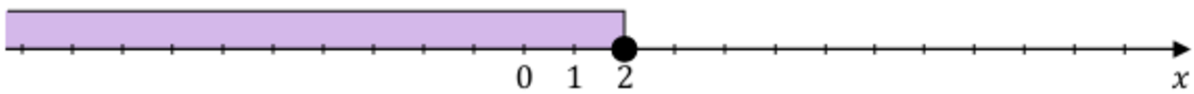
B.



C.



D.



Żeby rozwiązać powyższą nierówność należy ją przekształcić w następujący sposób:

$$\frac{2x-1}{2}-\frac{x+2}{3}\geqslant\frac{1}{6}\quad /\cdot 6$$

$$\frac{{}^{3}\cancel{6}\cdot(2x-1)}{\cancel{2}}-\frac{{}^{2}\cancel{6}\cdot(x+2)}{\cancel{3}}\geqslant\frac{\cancel{6}\cdot 1}{\cancel{6}}$$

$$3\cdot(2x-1)-2\cdot(x+2)\geqslant 1$$

$$6x-3-2x-4\geqslant 1$$

$$4x-7\geqslant 1$$

$$4x\geqslant 8\quad /4$$

$$x\geqslant 2$$

Ostry znak nierówności ($\geqslant$) mówi, że kółko na wykresie powinno być zamalowane, a rozwiązaniem są wszystkie $x\in\langle 2,\infty)$

Rozwiązaniem zatem jest odpowiedź B. **Odpowiedź:** B

Zadanie 2

Informator o egzaminie maturalnym z matematyki jako przedmiotu obowiązkowego (poziom podstawowy) od roku szkolnego 2024/2025

Dane jest równanie

$$\frac{2}{2x+1}=\frac{x-1}{x+2}$$

Wyznacz dziedzinę tego równania. Rozwiąż to równanie.

W pierwszym kroku takiego zadania musimy wyznaczyć dziedzinę równania, Pamiętajmy przy tym, że nie można dzielić przez 0, zatem, w żadnym z mianowników nie może wystąpić wartość równa 0. Mamy więc:

$$2x+1\neq 0$$
$$2x\neq -1 \ /2$$
$$x\neq -\frac{1}{2}$$

$$x+2\neq 0$$
$$x\neq -2$$

$$D: x\in R\backslash\{-2,-\frac{1}{2}\}$$

Wracamy teraz do równania, które aby rozwiązań musimy pomnożyć na krzyż:

$$\frac{2}{2x+1}=\frac{x-1}{x+2}$$
$$2\cdot(x+2)=(x-1)(2x+1)$$
$$2x+4=2x^2+x-2x-1$$
$$2x+4=2x^2-x-1$$
$$2x^2-3x-5=0$$

$a=2$
$b=-3$
$c=-5$
$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$$x\in\{-1,\frac{5}{2}\}$$

Zadanie 3

Informator o egzaminie maturalnym z matematyki jako przedmiotu obowiązkowego (poziom podstawowy) od roku szkolnego 2024/2025

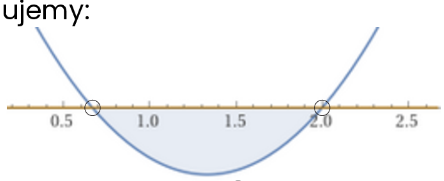
Rozwiąż nierówność

$$\mathbf{(3x-4)(x-1)<x}$$
$$3x^2-3x-4x+4<x$$
$$3x^2-8x+4<0$$

$a=3$
$b=-8$
$c=4$
$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\cdot 3\cdot 4=64-48=16$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8-\sqrt{16}}{2\cdot 3}=\frac{8-4}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8+\sqrt{16}}{2\cdot 3}=\frac{8+4}{6}=\frac{12}{6}=2$$

Po narysowaniu paraboli otrzymujemy:



Rozwiązaniem jest zatem przedział: $x\in(\frac{2}{3},2)$

5. Przykładowe zadania z lat poprzednich

Zadanie 1 *Egzamin maturalny, Formuła 2023, Matematyka Poziom podstawowy, 8 maja 2024 r.*

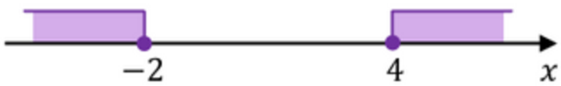
Dana jest nierówność

$$|x - 1| \geq 3$$

Na którym rysunku poprawnie zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających powyższą nierówność? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

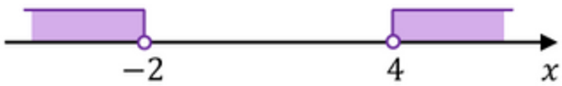
A.

B.



C.

D.

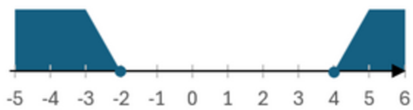


Rozpiszmy zgodnie z definicją nierówność:

$$|x - 1| \geqslant 3$$

$$\begin{array}{rcl} x - 1 \geqslant 3 & \vee & x - 1 \leqslant -3 \\ x \geqslant 3 - (-1) & & x \leqslant -3 - (-1) \\ x \leqslant 3 + 1 & & x \leqslant -3 + 1 \\ x \geqslant 4 & & x \leqslant -2 \end{array}$$

Po zaznaczeniu na osi obu przedziałów otrzymamy zakres odpowiadający rozwiązaniu:



Rozwiązaniem zatem jest przedział:

$$x \in (-\infty, -2 > \cup < 4, \infty)$$

Odpowiedź: B

Zadanie 2

Egzamin maturalny, Formuła 2023, Matematyka Poziom podstawowy, 8 maja 2024 r.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$1-\frac{3}{2}x<\frac{2}{3}-x$$

jest przedział

A. $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$ **B.** $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$ **C.** $\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$ **D.** $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

$$1-\frac{3}{2}x<\frac{2}{3}-x$$
$$-\frac{3}{2}x+x<\frac{2}{3}-1$$
$$-\frac{1}{2}x<-\frac{1}{3}\quad /\cdot(-2)$$
$$x>\frac{2}{3}$$

Odpowiedź: D

Zadanie 3

Egzamin maturalny, Formuła 2023, Matematyka Poziom podstawowy, 8 maja 2024 r.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $\frac{x+1}{(x+2)(x-3)}=0$ w zbiorze liczb rzeczywistych

A. nie ma rozwiązania.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie: (-1).

C. ma dokładnie dwa rozwiązania: (-2) oraz 3.

D. ma dokładnie trzy rozwiązania: (-1), (-2) oraz 3.

$$x+2\neq 0 \quad \wedge \quad x-3\neq 0$$
$$x\neq -2 \qquad\qquad x\neq 3$$
$$D: x\in R\setminus\{-2,3\}$$
$$\frac{x+1}{(x+2)(x-3)}=0$$
$$(x+1)(x+2)(x-3)=0$$

$$x+1=0 \qquad x=-1 \qquad \in D$$

$$x+2=0 \qquad x=-2 \qquad \notin D$$

$$x-3=0 \qquad x=3 \qquad \notin D$$

$$x=-1$$

Odpowiedź: B

Zadanie 4

Egzamin maturalny, Formuła 2023, Matematyka Poziom podstawowy, 8 maja 2024 r.

Rozwiąż równanie

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$$

Zapisz obliczenia.

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$$
$$x^2(x-2) - 3(x-2) = 0$$
$$(x-2)(x^2-3) = 0$$

$$x - 2 = 0 \qquad x^2 - 3 = 0$$
$$x = 2 \qquad x^2 = 3$$
$$x = \sqrt{3} \qquad x = -\sqrt{3}$$
$$x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$$

6. Na co uważać

Pamiętaj

Aby wygodnie zobrazować rozwiązania posiłkuj się osią, na której można w wygodny i prosty sposób zaznaczyć zbiory rozwiązań nierówności zarówno w przypadku równań liniowych, jak i kwadratowych.

Rysując parabolę odzwierciedlającą równanie kwadratowe należy pamiętać, że jej ramiona są skierowane w górę, jeśli współczynnik $a > 0$, a w dół gdy $a < 0$.

Pamiętaj, aby w równaniach wymiernych wyznaczyć dziedzinę rozwiązań i porównać rozwiązania równości właśnie z dziedziną. Nie wszystkie wartości wyniku należą do dziedziny.

7. Sprawdź się

Zadanie 1

Zaznacz na osi przedziały spełniające nierówność:

a) $|x-2| \geqslant 2$
b) $|x-2| < 2$
c) $|x+1| > 3$
d) $|x+1| \leqslant 3$
e) $|x-3| > 1$
f) $|x-3| \leqslant 1$

Zadanie 2

Rozwiąż nierówności

a) $3x - 5 \geqslant 2x + 7$
b) $8 + 5x - 7x < 10 - 6x + 4$
c) $6x + 20 > 10x + 36$
d) $20 - 4 - 6x \leqslant 18 - 11x + 4x$

Zadanie 3

Rozwiąż nierówności

a) $5(2x-3) + 4 \leqslant 3(x+1) + 2x$
b) $2(3x-4) - 5(x+6) > 3x - 8$
c) $4(2x-1) - 3(3x+2) > 5x - 7$
d) $-4(x-2) + 3(2x+1) \leqslant 2(x+5) - 7$

Zadanie 4

Rozwiąż nierówności

a) $\dfrac{2x+3}{4} \leqslant \dfrac{5x-1}{2}$

b) $\dfrac{3x-4}{5} + 2 \leqslant x - 1$

c) $\dfrac{5}{4}x - \dfrac{3}{4} \geqslant \dfrac{7}{3}x + \dfrac{1}{12}$

d) $\dfrac{3}{4}x - \dfrac{5}{6} \leqslant \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}$

Zadanie 5

Rozwiąż równanie

a) $\dfrac{2x+3}{x-1} = 4$

b) $\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{3}{x-2}$

c) $\dfrac{x+7}{x+1} = 5$

d) $\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{1}{x^2-1}$

Zadanie 6

Rozwiąż równanie

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $2x^2 - \dfrac{5}{2}x + \dfrac{1}{2} = 0$

c) $x^2 - 5x = 0$

d) $x^2 - 2x + 1 = 0$

Zadanie 7

Rozwiąż równanie

a) $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$

b) $2x^3 - 8x^2 + x - 4 = 0$

c) $x^3 - 5x^2 = 15 - 3x$

d) $3x^3 - x^2 = 27x - 9$